

СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНОСТИ КОНСТРУКТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ВЫЧИСЛИМО ПЕРЕЧИСЛИМЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЛАХ

Марат Хайдарович Файзрахманов¹
Злата Константиновна Щедрикова²

¹Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Научно-образовательный математический центр ПФО,
Казань, Россия,

²Университет Иннополис,
Иннополис, Россия

¹marat.faizrahmanov@gmail.com; <http://orcid.org/0000-0002-4519-9696>

²zlata.shchedrikova@yandex.ru; <https://orcid.org/0009-0005-9123-0681>

Аннотация

В статье исследуется свойство почти непрерывности (которое является одной из эффективных модификаций классического свойства непрерывности в конструктивном математическом анализе школы А. А. Маркова) конструктивных операторов, заданных на вычислимо перечислимых (в.п.) снизу вещественных числах, называемых L-операторами. Приводится критерий почти непрерывности произвольного возрастающего на отрезке $[a, b]$ L-оператора F , который заключается в том, что для любого вещественного $\varepsilon > 0$ и для любого числа α , принадлежащего образу отрезка $[a, b]$ относительно F , существует число β , принадлежащее тому же образу и удовлетворяющее условию $\alpha < \beta < \alpha + \varepsilon$. Приведенный критерий сравнивается с известным критерием непрерывности (в классическом математическом анализе) возрастающей на отрезке $[a, b]$ функции f , согласно которому f непрерывна на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда любое число, принадлежащее отрезку $[f(a), f(b)]$, является значением f . Доказывается существование возрастающего почти непрерывного L-оператора, у которого область значений состоит из всех в.п. снизу чисел, не принадлежащих наперед заданному отрезку $[c, d]$, где $c \leq d$ — произвольные рациональные числа. Строится возрастаю-

щий L-оператор, который не является псевдонепрерывным в нуле. Также строится возрастающий почти непрерывный L-оператор F , не имеющий на отрезке $[0, 1]$ обратного L-оператора и не являющийся непрерывным на нем, такой, что каждое в.п. снизу число из отрезка $[F(0), F(1)]$ является его значением.

Ключевые слова и фразы

в.п. снизу число, конструктивный оператор, почти непрерывный оператор, псевдонепрерывный оператор, возрастающий оператор.

Источник финансирования

Работа поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 24-11-00227).

Для цитирования

Файзрахманов М. Х., Щедрикова З. К. Свойства непрерывности конструктивных операторов на вычислимо перечислимых вещественных числах // *Математические труды*, 2025, Т. 28, № 4, С. 158-173. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-4-158-173

Continuity properties of constructive operators on the computably enumerable reals

Marat Kh. Faizrahmanov¹, Zlata K. Shchedrikova²,

¹Kazan (Volga Region) Federal University,
Volga Region Scientific-Educational Centre of Mathematics,
Kazan, Russia

²Innopolis University,
Innopolis, Russia

¹marat.faizrahmanov@gmail.com; <http://orcid.org/0000-0002-4519-9696>

²zlata.shchedrikova@yandex.ru; <https://orcid.org/0009-0005-9123-0681>

Abstract

This paper studies the almost continuity property (which is one of the effective modifications of the classical continuity property in constructive mathematical analysis of the A. A. Markov school) of constructive operators defined on left-computably enumerable (left-c.e.) reals, called L-operators.

A criterion is given for the almost continuity of an arbitrary L-operator F increasing on the segment $[a, b]$, which consists in the fact that for any real $\varepsilon > 0$ and for any real α belonging to the image of the segment $[a, b]$ with respect to F , there exists a real β belonging to the same image and satisfying the condition $\alpha < \beta < \alpha + \varepsilon$. The presented criterion is compared with the well-known continuity criterion (from the standpoint of classical mathematical analysis) of an increasing function f on the segment $[a, b]$, according to which f is continuous on $[a, b]$ if and only if any real belonging to the segment $[f(a), f(b)]$ is a value of f . The existence of an increasing almost continuous L-operator is proved, whose range consists of all left-c.e. reals that do not belong to a given interval $[c, d]$, where $c \leq d$ are arbitrary rationals. An increasing L-operator is constructed that is not pseudocontinuous at 0. An increasing almost continuous L-operator F is also constructed, which does not have an inverse L-operator on the segment $[0, 1]$ and that is not continuous on this segment, such that each left-c.e. real from the segment $[F(0), F(1)]$ is its value.

Keywords

left-c.e. real, constructive operator, almost continuous operator, pseudocontinuous operator, increasing operator.

Funding

This work was supported by the Russian Science Foundation (grant no. 24-11-00227).

For citation

Faizrahmanov M. Kh., Shchedrikova Z. K., Continuity properties of constructive operators on the computably enumerable reals // *Mat. Trudy*, 2025, V. 28, N. 4, P. 158-173. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-4-158-173

§1. Введение и постановка задачи

В настоящей статье изучаются операторы, эффективно отображающие вычислимо перечислимые (в.п.) снизу вещественные числа¹ в них же, и свойства их непрерывности с позиции конструктивного математического анализа школы Маркова [1–3] (определения всех упоминаемых во введении свойств непрерывности конструктивных операторов приводятся в последующих разделах статьи).

Одним из классических результатов конструктивного математического анализа является теорема о непрерывности конструктивных операторов, заданных на множестве *FR-чисел* (вычислимых вещественных чисел) (см. [2–4]). В [5, 6] исследовались свойства непрерывности конструктивных

¹В зарубежной литературе они называются “left-c.e. reals” (см., например, [8]).

операторов, заданных на множествах *квазичисел* (FR-чисел без регуляторов фундаментальности) и *псевдочисел* (пределов вычислимых последовательностей рациональных чисел). В процитированных работах было установлено, что такие операторы, вообще говоря, уже не являются непрерывными, но все они обладают свойством *почти непрерывности*, которое можно рассматривать как конечную вычислимую сверху аппроксимацию понятия непрерывности.

В работе [7] изучались свойства непрерывности конструктивных операторов, заданных на в.п. снизу вещественных числах (пределах неубывающих ограниченных сверху вычислимых последовательностей рациональных чисел), называемых *L-операторами*. Эти числа занимают промежуточную по включению позицию между FR-числами и псевдочислами, но в отличие от них они обладают вычислимой нумерацией (см., например, [9]) и поэтому соотносятся с ними в конструктивном анализе как в.п. множества с вычислимыми и предельно вычислимыми множествами в теории рекурсии. В [7] было показано, что каждый L-оператор является неубывающим и почти непрерывным слева, но может не являться почти непрерывным. Там же установлено, что почти непрерывные L-операторы могут не быть непрерывными ни слева, ни справа.

В настоящей статье исследуются свойства непрерывности L-операторов на отрезках. В ней приводится критерий почти непрерывности L-оператора, возрастающего на отрезке, схожий с известным критерием непрерывности возрастающей на отрезке функции из классического математического анализа (согласно которому возрастающая на отрезке $[a, b]$ функция f вещественной переменной непрерывна на нем тогда и только тогда, когда любое число $\gamma \in [f(a), f(b)]$ является значением f), но тем не менее не являющийся его конструктивным аналогом. Также в статье исследуется вопрос об обратимости возрастающего и почти непрерывного на отрезке L-оператора, которая в классическом анализе имеет место для любой возрастающей и непрерывной на отрезке функции вещественной переменной. Отметим, что свойства непрерывности L-операторов и их обобщений активно исследуются с начала XXI столетия. Так в работе [10] они исследуются как эффективные отображения в рекурсивных квази-метрических пространствах. В работах [11, 12] обобщенные L-операторы изучаются в контексте колмогоровской сложности и с позиции синтетической вычислимости. В [13, 14] рассматриваются операторы, конструктивные в смысле Банаха-Мазура.

В обозначениях и терминологии теории вычислимости мы придерживаемся монографии [15]. Через $\varphi_e^{(n)}$, $n \geq 1$, обозначаем n -местную частично вычислимую функцию с геделевским номером e . При $n = 1$ верхний индекс будем опускать. Для частичной функции ψ ее область определения

обозначается через $\text{dom } \psi$, а область значений — через $\text{ran } \psi$. Используем запись $\psi(x) \downarrow$, если $x \in \text{dom } \psi$, и $\psi(x) \uparrow$, в противном случае.

§2. Предварительные сведения

Пусть $\{q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ — некоторая вычислимая нумерация множества всех рациональных чисел. Для каждого $e \in \mathbb{N}$ через ρ_e обозначаем частичную функцию из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{Q}$, определенную на всех $x \in \text{dom } \varphi_e$ равенством $\rho_e(x) = q_{\varphi_e(x)}$ и неопределенную на всех $x \notin \text{dom } \varphi_e$.

Число $\alpha \in \mathbb{R}$ называется *в.п. снизу (сверху)*, если существует e , для которого ρ_e всюду определена и не убывает (не возрастает) и $\alpha = \lim_x \rho_e(x)$. В дальнейшем в.п. снизу числа будем отождествлять с их геделевскими номерами из множества

$$\mathbf{L} = \{e : \rho_e \text{ всюду определена, не убывает и ограничена сверху}\}.$$

Аналогично определяется множество $\mathbf{R}$, с элементами которого будем отождествлять в.п. сверху числа. Для каждого $e \in \mathbf{L} \cup \mathbf{R}$ через α_e будем обозначать предел $\lim_x \rho_e(x)$. Зафиксируем некоторую вычислимую функцию $S : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbf{L}$, удовлетворяющую для всех $q \in \mathbb{Q}$ условию

$$\alpha_{S(q)} = q.$$

Следуя [5, 7], назовем отображение $F : \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}$ *L-оператором*, если $\alpha_{F(e)} = \alpha_{F(i)}$ для всех $e, i \in \mathbf{L}$, для которых $\alpha_e = \alpha_i$, и существует такая частично вычислимая функция ψ , что $\mathbf{L} \subseteq \text{dom } \psi$ и $F(e) = \psi(e)$ для всех $e \in \mathbf{L}$. Если частично вычислимая функция ψ удовлетворяет определению L-оператора F , то будем говорить, что она *задает* L-оператор F .

В [7] было установлено, что каждый L-оператор F является неубывающим (т.е. $\alpha_{F(i)} \leq \alpha_{F(e)}$ для всех $e, i \in \mathbf{L}$ с $\alpha_i \leq \alpha_e$) и *почти непрерывным слева*. Последнее означает, что существует неубывающая по третьему аргументу тернарная частично вычислимая функция $\xi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, такая, что $\mathbf{L} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \subseteq \text{dom } \xi$, для всех $e \in \mathbf{L}$ и $n \in \mathbb{N}$ последовательность $\{\xi(e, n, s)\}_{s \in \mathbb{N}}$ стабилизируется на элементе, который будем обозначать через $\hat{\xi}(e, n)$, и при любом $i \in \mathbf{L}$ из неравенства

$$0 \leq \alpha_e - \alpha_i < 2^{-\hat{\xi}(e, n)} \quad (1)$$

следует неравенство

$$\alpha_{F(e)} - \alpha_{F(i)} < 2^{-n}. \quad (2)$$

Поменяв в двух последних неравенствах e и i местами, получим определение *почти непрерывного справа* L-оператора. Почти непрерывные одновременно слева и справа L-операторы называются *почти непрерывными*. Заметим, что если в определении почти непрерывного слева L-оператора неравенства (1) и (2) заменить соответственно неравенствами

$$|\alpha_e - \alpha_i| < 2^{-\hat{\xi}(e,n)},$$

$$|\alpha_{F(e)} - \alpha_{F(i)}| < 2^{-n},$$

то получим равносильное определение почти непрерывного L-оператора.

Если для L-оператора F существует бинарная частично вычислимая функция $\delta : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ с $\mathbf{L} \times \mathbb{N} \subseteq \text{dom } \delta$, удовлетворяющая для всех $e \in \mathbf{L}$ и $n \in \mathbb{N}$ условию (2) всякий раз когда

$$0 \leq \alpha_e - \alpha_i < 2^{-\delta(e,n)},$$

то он называется *непрерывным слева*. Поменяв в двух последних условиях e и i местами, получим определение *непрерывного справа* L-оператора. Непрерывные одновременно слева и справа L-операторы называются *непрерывными*. Для этого и последующих определений свойств непрерывности справедливо то же замечание, что и для определения почти непрерывного L-оператора.

Скажем, что L-оператор F *псевдонепрерывен слева (справа) в точке* $e \in \mathbf{L}$, если для любого вещественного $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для любого $i \in \mathbf{L}$ из

$$0 \leq \alpha_e - \alpha_i < \delta \quad (0 \leq \alpha_i - \alpha_e < \delta)$$

следует

$$\alpha_{F(e)} - \alpha_{F(i)} < \varepsilon \quad (\alpha_{F(i)} - \alpha_{F(e)} < \varepsilon).$$

Если F в точке e является одновременно псевдонепрерывным слева и справа, то он называется *псевдонепрерывным в e* .

Назовем L-оператор F *псевдонепрерывным (слева, справа) на отрезке* $[\alpha_k, \alpha_l]$, где $k, l \in \mathbf{L}$, если он псевдонепрерывен (слева, справа соответственно) в каждой точке $e \in \mathbf{L}$ с $\alpha_e \in [\alpha_k, \alpha_l]$. Если участвующие в определениях почти непрерывных и непрерывных слева (справа) L-операторов числа $e, i \in \mathbf{L}$ ограничить условием $\alpha_e, \alpha_i \in [\alpha_k, \alpha_l]$, получим определение *почти непрерывных и непрерывных слева (справа) на отрезке* $[\alpha_k, \alpha_l]$ L-операторов. Почти непрерывные (непрерывные) на отрезке слева и справа L-операторы называются *почти непрерывными (непрерывными) на нем*.

Если число $j \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $e, i \in \mathbf{L}$ с $\alpha_k \leq \alpha_e, \alpha_i \leq \alpha_l$ и всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется $\varphi_j^{(2)}(e, n) \downarrow$ и всякий раз, когда

$$|\alpha_e - \alpha_i| < 2^{-\varphi_j^{(2)}(e, n)},$$

справедливо неравенство

$$|\alpha_{F(e)} - \alpha_{F(i)}| < 2^{-n},$$

то F называется непрерывным на отрезке $[\alpha_k, \alpha_l]$ посредством $\varphi_j^{(2)}$.

Будем говорить, что L -оператор F *возрастает на отрезке* $[\alpha_k, \alpha_l]$, если $\alpha_{F(i)} < \alpha_{F(e)}$ для всех $e, i \in \mathbf{L}$ с $\alpha_k \leq \alpha_i < \alpha_e \leq \alpha_l$. Назовем F *равномерно псевдонепрерывным на отрезке* $[\alpha_k, \alpha_l]$, если для любого вещественного $\varepsilon > 0$ существует такое вещественное $\delta > 0$, что $\alpha_{F(e)} - \alpha_{F(i)} < \varepsilon$ для всех $e, i \in \mathbf{L}$, для которых $\alpha_e, \alpha_i \in [\alpha_k, \alpha_l]$ и $0 \leq \alpha_e - \alpha_i < \delta$.

Скажем, что L -оператор G является *обратным к F на отрезке* $[\alpha_k, \alpha_l]$, если

$$\alpha_{F(G(e))} = \alpha_e$$

для всех $e \in \mathbf{L}$ с $\alpha_e \in [\alpha_{F(k)}, \alpha_{F(l)}]$.

§3. Основные результаты

Сперва докажем анонсированный во введении критерий почти непрерывности возрастающего на отрезке L -оператора.

Теорема 1. Пусть F – возрастающий на отрезке $[\alpha_k, \alpha_l]$, $k, l \in \mathbf{L}$, L -оператор. Тогда для того, чтобы F был почти непрерывным на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы для любого $e \in \text{ran } F$, такого, что $\alpha_e \in [\alpha_{F(k)}, \alpha_{F(l)}]$, и любого вещественного $\varepsilon > 0$ существовало $i \in \text{ran } F$, для которого $\alpha_i \in [\alpha_{F(k)}, \alpha_{F(l)}]$ и $\alpha_i \in (\alpha_e, \alpha_e + \varepsilon)$.

Доказательство. Начнем с доказательства необходимости. В теореме 2 из работы [7] было установлено, что L -оператор является почти непрерывным тогда и только тогда, когда он псевдонепрерывен справа. Прямой проверкой можно убедиться, что эта теорема остается верной и для почти непрерывности на отрезке $[\alpha_k, \alpha_l]$. Поскольку F псевдонепрерывен справа на $[\alpha_k, \alpha_l]$ и возрастает на этом отрезке, немедленно получаем необходимость условия теоремы.

Для доказательства достаточности условия теоремы стоит лишь заметить, что из него, с учетом того, что F не убывает, непосредственно вытекает псевдонепрерывность F справа. $\square$

Теперь покажем, что полученный критерий не является конструктивным вариантом аналогичного критерия непрерывности из классического анализа. Следующая теорема также показывает, что почти непрерывные на отрезке L-операторы могут не быть равномерно псевдонепрерывными на нем.

Теорема 2. Для любых рациональных чисел $c \leq d$ существует возрастающий почти непрерывный L-оператор F , такой, что

$$\bigcup_{i \in \text{ran } F} \{e \in \mathbf{L} : \alpha_e = \alpha_i\} = \mathbf{L} \setminus \{e \in \mathbf{L} : c \leq \alpha_e \leq d\}. \quad (3)$$

Доказательство. Зафиксируем какое-нибудь число $w \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{L}$, для которого ρ_w убывает (см., например, [8]). Далее для каждого k значение $\rho_w(k)$ будем обозначать через p_k . Чтобы определить искомый оператор F , построим возрастающие последовательности рациональных чисел $\{\hat{a}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{\hat{b}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ и убывающую последовательность рациональных чисел $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, для которых

$$\lim_k \hat{a}_k = \alpha_w \ \& \ \lim_k \hat{b}_k = c \ \& \ \lim_k r_k = d.$$

После этого определим F как кусочно-линейную функцию, удовлетворяющую условиям

$$\forall k [\alpha_{F(S(\hat{a}_k))} = \hat{b}_k \ \& \ \alpha_{F(S(p_k))} = r_k], \quad (4)$$

$$\forall i \in \mathbf{L} [\alpha_i \in (-\infty, \hat{a}_0) \cup (r_0, +\infty) \Rightarrow \alpha_{F(i)} = \alpha_i]. \quad (5)$$

Таким образом, будем иметь справедливость равенства (3) и что F будет возрастающим и псевдонепрерывным справа. Последнее, согласно теореме 2 [7], будет гарантировать его почти непрерывность.

Одновременно с последовательностями $\{\hat{a}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{\hat{b}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ и $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ будем строить в.п. бинарное отношение $P \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, такое, что

$$\forall y \in \mathbb{Q} \exists z \in \mathbb{Q} [\langle y, z \rangle \in P] \quad (6)$$

и что определив F как отображение $e \mapsto f(e)$, $e \in \mathbf{L}$, где f — вычислимая функция, удовлетворяющая для всех $i \in \mathbf{L}$ условию

$$\alpha_{f(i)} = \sup\{z \in \mathbb{Q} : \exists x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{Q} [y < \rho_i(x)] \ \& \ \langle y, z \rangle \in P\}, \quad (7)$$

получим, что F является L-оператором и для него выполняются условия (4) и (5). Справедливость равенства (3) для определенного таким образом оператора F будет следовать из того, что $w \notin \mathbf{L}$.

Построение.

Шаг 0. Выберем убывающую вычислимую последовательность $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, где $r_k \in \mathbb{Q}$, такую, что $\lim_k r_k = d$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ и каждого $u \in \mathbb{Q}$ если $p_{k+1} \leq u \leq p_k$, то добавим в P пару $\langle u, y_u^k \rangle$, где

$$y_u^k = \frac{r_{k+1} - r_k}{p_{k+1} - p_k} u - \frac{r_{k+1} - r_k}{p_{k+1} - p_k} p_k + r_k.$$

Также для каждого $u > p_0$ добавим в P пару $\langle u, r_0 + u \rangle$.

Выберем рациональные a_0 и b_0 , для которых $a_0 < \alpha_w - 1$ и $b_0 < c$, и для каждого рационального $u < a_0$ добавим в P пару $\langle u, b_0 - u \rangle$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ определим $a_k^0 = a_0$, если $k = 0$, и $a_k^0 = p_0 - 2^{-k}$, если $k > 0$. Пусть $\{b_{k+1}\}_{k \in \mathbb{N}}$, $b_{k+1} \in \mathbb{Q}$ — вычислимая возрастающая последовательность, такая, что $b_0 < b_1$ и $\lim_k b_k = c$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим $b_k^0 = b_k$.

Шаг $s + 1$. Если существует $i \leq s$, которое вместе с некоторым $k \leq s$ удовлетворяет условию

$$p_i > a_k^s, \quad (8)$$

то выберем наибольшее такое i и наименьшее k , удовлетворяющее вместе с ним условию (8). Поскольку $a_0 < \alpha_w - 1$, имеем, что $k > 0$. Затем (некоторым наперед фиксированным равномерным способом) выберем возрастающую вычислимую последовательность $\{a_{k+m}\}_{m \in \mathbb{N}}$, $a_{k+m} \in \mathbb{Q}$, такую, что

$$a_k > a_{k-1}^s \ \& \ \forall m \in \mathbb{N} [a_{k+m} - a_{k-1+m} < 2^{-s}] \ \& \ \lim_m a_{k+m} = p_i, \quad (9)$$

и после этого для всех m определим

$$a_{k+m}^{s+1} = a_{k+m}.$$

Для всех $j < k$ положим $a_j^{s+1} = a_j^s$. Далее, выберем возрастающую вычислимую последовательность $\{b_{k+m}\}_{m \in \mathbb{N}}$, $b_{k+m} \in \mathbb{Q}$, такую, что

$$b_k > b_{k-1}^s \ \& \ \lim_m b_{k+m} = c,$$

а также

$$\forall m \in \mathbb{N} [b_{k+m} > z] \quad (10)$$

для всех таких z , что на одном из предыдущих шагов построения для некоторых n и t в P была добавлена пара $\langle a_n^t, z \rangle$. После этого для всех m определим

$$b_{k+m}^{s+1} = b_{k+m}.$$

Для всех $j < k$ положим $b_j^{s+1} = b_j^s$.

Если же ни для каких $i \leq s$ и $k \leq s$ условие (8) не выполняется, то для всех j полагаем $a_j^{s+1} = a_j^s$ и $b_j^{s+1} = b_j^s$.

Теперь для каждого натурального $k \leq s$ и каждого рационального u , для которого

$$a_0 \leq u \leq a_{k+1}^{s+1},$$

добавим в P пару $\langle u, z_{k,u}^s \rangle$, где

$$z_{k,u}^s = \frac{b_{k+1}^{s+1} - b_k^{s+1}}{a_{k+1}^{s+1} - a_k^{s+1}} u - \frac{b_{k+1}^{s+1} - b_k^{s+1}}{a_{k+1}^{s+1} - a_k^{s+1}} a_k^{s+1} + b_k^{s+1}.$$

Этим завершается описание построения.

В конце построения положим $F(e) = f(e)$, $e \in \mathbf{L}$, где f — вычислимая функция, удовлетворяющая для всех $i \in \mathbf{L}$ условию (7).

Покажем, что оператор F является искомым. На нулевом шаге построения обеспечивается, что $\lim_k r_k = d$, а также что

$$\alpha_{F(S(p_k))} = r_k$$

для всех k и $\alpha_{F(i)} = \alpha_i$ для всех $i \in \mathbf{L}$, для которых $\alpha_i \in (r_0, +\infty)$.

Поскольку на каждом шаге $s+1$ построения выполняются проверки (8) и (9), а число α_w не рациональное, имеем, что для каждого k существует лишь конечное число шагов $s+1$, на которых выполняется $a_k^{s+1} \neq a_k^s$. Поэтому для каждого k существует конечный предел

$$\hat{a}_k \Leftarrow \lim_s a_k^s \in \mathbb{Q},$$

причем последовательность $\{\hat{a}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ возрастает и $\lim_k \hat{a}_k = \alpha_w$. Теперь непосредственно из построения следует, что для каждого k существует лишь конечное число шагов $s+1$, на которых выполняется $b_k^{s+1} \neq b_k^s$, и что для каждого k существует конечный предел

$$\hat{b}_k \Leftarrow \lim_s b_k^s \in \mathbb{Q},$$

причем последовательность $\{\hat{b}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ возрастает и $\lim_k \hat{b}_k = c$. Поскольку $w \notin \mathbf{L}$, имеем $\alpha_{F(v)} < c$ для любого $v \in \mathbf{L}$ с $\alpha_v < \alpha_w$. Кроме того, на нулевом шаге построения обеспечивается, что $\alpha_{F(i)} = \alpha_i$ для всех $i \in \mathbf{L}$, для которых $\alpha_i \in (-\infty, \hat{a}_0)$ (заметим, что $\hat{a}_0 = a_0 < \alpha_w - 1$). Таким образом, F удовлетворяет условию (5). Поскольку перед добавлением в P пар вида $\langle u, z_{k,u}^s \rangle$ выполняются проверки (10), имеем, что

$$\alpha_{F(S(\hat{a}_k))} = \hat{b}_k$$

для всех k . Стало быть, F также удовлетворяет условию (4). Этим завершается доказательство теоремы. $\square$

Следующее предложение показывает нетривиальность критерия из теоремы 1, а именно, что возрастающие на отрезке $\mathbf{L}$ -операторы могут не быть почти непрерывными и даже псевдонепрерывными на нем.

Предложение 1. *Существует возрастающий $\mathbf{L}$ -оператор, который не является псевдонепрерывным в нуле.*

Доказательство. Предложению удовлетворяет $\mathbf{L}$ -оператор F , определенный для всех $e \in \mathbf{L}$ следующим образом:

$$F(e) = \begin{cases} e, & \text{если } \alpha_e \leq 0, \\ h(e), & \text{если } \alpha_e > 0, \end{cases}$$

где h — такая вычислимая функция, что $h(i) \in \mathbf{L}$ и $\alpha_{h(i)} = 1 + \alpha_i$ для всех $i \in \mathbf{L}$. $\square$

В классическом анализе известно, что любая возрастающая и непрерывная на отрезке функция обратима на нем. Из следующей теоремы вытекает, что для $\mathbf{L}$ -операторов конструктивный аналог этого утверждения не имеет места. В ней также доказывается, что классический критерий непрерывности на отрезке возрастающей на нем функции не является критерием непрерывности для $\mathbf{L}$ -операторов.

Теорема 3. *Существует возрастающий $\mathbf{L}$ -оператор F , не имеющий обратного $\mathbf{L}$ -оператора на отрезке $[0, 1]$ и не являющийся непрерывным слева на нем, такой, что для каждого $e \in \mathbf{L}$, удовлетворяющего условию $0 \leq \alpha_e \leq 1$, существует $i \in \mathbf{L}$, для которого $\alpha_e = \alpha_{F(i)}$.*

Доказательство. Построим в.п. бинарное отношение $P \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, удовлетворяющее условию (6), а затем для всех $e \in \mathbf{L}$ определим $F(e) = f(e)$, где f — вычислимая функция, удовлетворяющая для всех $i \in \mathbf{L}$ условию (7).

Для каждого рационального u , такого, что либо $u \leq 0$, либо $1 \leq u$, добавим в P пару $\langle u, u \rangle$. Зафиксируем убывающие вычислимые последовательности $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ и $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ рациональных чисел, удовлетворяющие следующим условиям:

$$p_0 = r_0 = 1 \ \& \ \lim_k p_k = \lim_k r_k = 0,$$

и для каждого $k \in \mathbb{N}$ и каждого $u \in \mathbb{Q}$ если $p_{k+1} \leq u \leq p_k$, то добавим в P пару $\langle u, y_u^k \rangle$, где

$$y_u^k = \frac{r_{k+1} - r_k}{p_{k+1} - p_k} u - \frac{r_{k+1} - r_k}{p_{k+1} - p_k} p_k + r_k.$$

Далее, для каждого k введем обозначение

$$t_k = r_{k+1} + \frac{r_k - r_{k+1}}{2}$$

и зафиксируем w_k , для которого $\langle w_k, t_k \rangle \in P$. Теперь для каждого k начнем добавлять в P новые пары таким образом, чтобы при четном k частичная функция φ_j , где $j = \frac{k}{2}$, на задавала обратный для F L-оператор на отрезке $[0, 1]$, и чтобы при нечетном k оператор F не был непрерывным на $[0, 1]$ посредством $\varphi_j^{(2)}$, где $j = \frac{k-1}{2}$.

Пусть k четно. Если

$$\varphi_j(S(t_k)) \downarrow \& \exists n [\rho_{\varphi_j(S(t_k))}(n) \downarrow > p_{k+1}], \quad (11)$$

то (некоторым заранее фиксированным эффективным способом) выберем рациональное v_k , такое, что

$$p_{k+1} < v_k \& \exists n [v_k < \rho_{\varphi_j(S(t_k))}(n) \downarrow] \& v_k < w_k, \quad (12)$$

и для всех $u_0, u_1 \in \mathbb{Q}$, удовлетворяющих неравенствам $p_{k+1} \leq u_0 \leq v_k$ и $v_k \leq u_1 \leq p_k$, добавим в P пары $\langle u_0, m_{0,k} \rangle$ и $\langle u_1, m_{1,k} \rangle$, где

$$m_{0,k} = \frac{r_{k+1} - t_k}{p_{k+1} - v_k} u_0 - \frac{r_{k+1} - t_k}{p_{k+1} - v_k} v_k + t_k, \quad m_{1,k} = \frac{t_k - r_k}{v_k - p_k} u_1 - \frac{t_k - r_k}{v_k - p_k} p_k + r_k.$$

Теперь предположим, что k нечетно. Выберем какое-нибудь n , для которого

$$r_k - t_k > 2^{-n}.$$

Если $\varphi_j^{(2)}(S(w_k), n) \downarrow$, то выберем рациональные v_k и z_k , для которых

$$0 < w_k - v_k < 2^{-\varphi_j^{(2)}(S(w_k), n)} \& \langle v_k, z_k \rangle \in P,$$

и рациональное t'_k , такое, что

$$t_k < t'_k < r_k \& t'_k - z_k > 2^{-n},$$

а затем для всех $u_0, u_1 \in \mathbb{Q}$, удовлетворяющих неравенствам $v_k \leq u_0 \leq w_k$ и $w_k \leq u_1 \leq p_k$, добавим в P пары $\langle u_0, m_{0,k} \rangle$ и $\langle u_1, m_{1,k} \rangle$, где

$$m_{0,k} = \frac{z_k - t'_k}{v_k - w_k} u_0 - \frac{z_k - t'_k}{v_k - w_k} w_k + t'_k, \quad m_{1,k} = \frac{t'_k - r_k}{w_k - p_k} u_1 - \frac{t'_k - r_k}{w_k - p_k} p_k + r_k.$$

Таким образом, L-оператор F является кусочно-линейной функцией, такой, что для всех k справедливо $\alpha_{F(S(p_k))} = r_k$ и если v_k определено, то

$\alpha_{F(S(v_k))} = t_k$ при четном k , и $\alpha_{F(S(v_k))} = z_k$, $\alpha_{F(S(w_k))} = t'_k$ при нечетном k . Стало быть, для каждого $e \in \mathbf{L}$, удовлетворяющего условию $0 \leq \alpha_e \leq 1$, существует $i \in \mathbf{L}$, для которого $\alpha_e = \alpha_{F(i)}$.

Покажем, что F не имеет обратного L-оператора на отрезке $[0, 1]$. Предположим, напротив, такой оператор G существует. Выберем такое $k = 2j$, что $\varphi_j(e) \downarrow = G(e)$ для всех $e \in \mathbf{L}$. Проверки (11) и (12) в построении P обеспечивают, что

$$\alpha_{G(S(t_k))} < \alpha_{\varphi_j(S(t_k))}.$$

Полученное неравенство противоречит выбору k .

Покажем, что F не является непрерывным слева на $[0, 1]$. Если F непрерывен слева на $[0, 1]$ посредством $\varphi_j^{(2)}$, то при $k = 2j + 1$ имеем

$$0 < w_k - v_k < 2^{-\varphi_j^{(2)}(S(w_k), n)} \ \& \ \alpha_{F(S(w_k))} - \alpha_{F(S(v_k))} > 2^{-n}.$$

Отсюда получаем противоречие с выбором j . □

Список литературы

1. Марков А.А. О конструктивной математике, *Проблемы конструктивного направления в математике. 2. Конструктивный математический анализ*. Сборник работ, Тр. МИАН СССР. Т. 67. Изд-во АН СССР, М.–Л., С. 8–14, 1962.
2. Кушнер Б.А. *Лекции по конструктивному математическому анализу*. Москва: Наука, 1973.
3. Шурыгин В. А. *Основы конструктивного математического анализа*. Изд. 2-е. Москва: Книжный дом «Либроком», 2009.
4. Цейтин Г.С. Алгоритмические операторы в конструктивных метрических пространствах, *Проблемы конструктивного направления в математике. 2. Конструктивный математический анализ*. Сборник работ, Тр. МИАН СССР. Т. 67. Изд-во АН СССР, М.–Л., С. 295–361, 1962.
5. Кушнер Б.А. Теоремы непрерывности для некоторых типов вычислимых операторов // *Докл. АН СССР*. 1973. Т. 208, № 5. С. 1031–1034.
6. Кушнер Б.А. Об одном типе вычислимых действительных функций // *Докл. АН СССР*. 1974. Т. 215, № 2. С. 259–262.
7. Файзрахманов М.Х. Теоремы непрерывности для одного класса вычислимых операторов // *Матем. заметки*. 2025. Т. 117, № 4. С. 591–599.

8. Nies A. *Computability and randomness*. Oxford: Oxford Logic Guides, 2009.
9. Brodhead P., Kjos-Hanssen B. *Numberings and randomness*. In: *Mathematical Theory and Computational Practice*, K. Ambos-Spies, B. Löwe, and W. Merkle, Eds., *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 5635. Berlin, Heidelberg, Springer, 2009.
10. Brattka V. Recursive quasi-metric spaces // *Theor. Comp. Sci.* 2003. V. 305, N 1. P. 17–42.
11. Hoyrup M., Rojas C. On the information carried by programs about the objects they compute // *Theor. Comp. Syst.* 2017. V. 61, N 4. P. 1214–1236.
12. Bauer A. Sreen spaces and the synthetic Kreisel-Lacombe-Shoenfield-Tseitin theorem // *J. Logic Anal.* 2025. V. 17. P. 1–24.
13. Rauzy E. A generalization of Markov’s approach to the continuity problem for Type 1 computable functions // *arXiv*. 2024. Доступно на: <https://arxiv.org/abs/2311.15857>
14. Faizrahmanov M.Kh. Computable operators on left-c.e. reals and their continuity properties // *Logic J. IGPL*. 2025. V. 33, N 3. jzaf011.
15. Soare R.I. *Turing computability. Theory and applications*. Springer-Verlag: Berlin-Heidelberg, 2016.

References

1. Markov A.A. On constructive mathematics, *Problems of the constructive direction in mathematics. Part 2. Constructive mathematical analysis*. Collection of articles, Trudy Mat. Inst. Steklov. T. 67. Acad. Sci. USSR, Moscow–Leningrad, P. 8–14, 1962 (in Russian).
2. Kushner B.A. *Lektsii po konstruktivnomu matematicheskomu analizu*. Moscow: Nauka, 1973 (in Russian) [Eng transl.: Mendelson E. *Lectures on constructive mathematical analysis*. Translations of Mathematical Monographs. vol. 60. 1984].
3. Shurygin V.A. *Osnovy konstruktivnogo matematicheskogo analiza*. 2nd ed. Moscow: Book House «Librokom», 2009 (in Russian).

4. Tseytin G.S. Algorithmic operators in constructive metric spaces, *Problems of the constructive direction in mathematics. Part 2. Constructive mathematical analysis*. Collection of articles, Trudy Mat. Inst. Steklov. T.67. Acad. Sci. USSR, Moscow–Leningrad, P.295–361, 1962 (in Russian)
5. Kushner B.A. Continuity theorems for some types of computable operators // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1973. V. 208, N 5. P. 1031–1034 (in Russian).
6. Kushner B.A. On a type of computable real functions // *Dokl. Akad. Nauk SSSR*. 1974. V. 215, N 2. P. 259–262 (in Russian).
7. Faizrahmanov M.Kh. Continuity theorems for a class of computable operators // *Math. Notes*. 2025. V. 117, N 4. P. 643–649.
8. Nies A. *Computability and randomness*. Oxford: Oxford Logic Guides, 2009.
9. Brodhead P., Kjos-Hanssen B. *Numberings and randomness*. In *Mathematical Theory and Computational Practice*, K. Ambos-Spies, B. Löwe, and W. Merkle, Eds., *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 5635. Berlin, Heidelberg, Springer, 2009.
10. Brattka V. Recursive quasi-metric spaces // *Theor. Comp. Sci.* 2003. V. 305, N 1. 17–42.
11. Hoyrup M., Rojas C. On the information carried by programs about the objects they compute // *Theor. Comp. Syst.* 2017. V. 61, N 4. P. 1214–1236.
12. Bauer A. Sreen spaces and the synthetic Kreisel-Lacombe-Shoenfield-Tseytin theorem // *J. Logic Anal.* 2025. V. 17. P. 1–24.
13. Rauzy E. A generalization of Markov’s approach to the continuity problem for Type 1 computable functions // *arXiv*. 2024. Available on: <https://arxiv.org/abs/2311.15857>
14. Faizrahmanov M.Kh. Computable operators on left-c.e. reals and their continuity properties // *Logic J. IGPL*. 2025. V. 33, N 3. jzaf011.
15. Soare R.I. *Turing computability. Theory and applications*. Springer-Verlag: Berlin-Heidelberg, 2016.

Информация об авторах

Марат Хайдарович Файзрахманов, доктор

физико-математических наук,

SPIN 7000-4283 AuthorID: 901869

Scopus Author ID 36706020100

Web of Science Researcher ID K-7976-2015

Злата Константиновна Щедрикова, аспирант,

AuthorID: 1236693

Scopus Author ID 58786862600

Author Information

Marat Kh. Faizrahmanov, Doctor of Mathematics,

SPIN 7000-4283 AuthorID: 901869

Scopus Author ID 36706020100

Web of Science Researcher ID K-7976-2015

Zlata K. Shchedrikova, Postgraduate student,

SPIN номер AuthorID: 1236693

Scopus Author ID 58786862600

*Статья поступила в редакцию 13.03.2025;
одобрена после рецензирования 15.10.2025; принята к публикации
05.11.2025*

*The article was submitted 13.03.2025;
approved after reviewing 15.10.2025; accepted for publication 05.11.2025*